MAI cvičení - derivace funkce a užití derivace.

1. Výpočet limit funkcí užitím L′ Hospitalova pravidla:

Vypočítejte limity:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln 3x}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln(2+3x^3)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\sin x}$; $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin x)}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-1}{\sin x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctg\, x}{x^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0+} x^2\ln x$; $\lim\limits_{x\to 0+} x^a\ln x\ (a>0)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1-\frac{2}{x})$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\arcsin\frac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}}$;

$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+1\right)\cdot\left(\log\left(n^2-4\right)-2\log n\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{3x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln x\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(arctg\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$; $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{2}{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-2x\right)^{\frac{1}{2x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$;

$\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

2. Spojitost funkce, výpočet derivací a dopočítávání derivací ve „špatných" bodech:

a) Vyšetřete existenci a hodnotu derivace funkce $f(x)=\left|\ln x\right|$ a $g(x)=\left|\ln^3 x\right|$ v bodě $x=1$.
Dokážete výsledek zobecnit ?

b) Je dána funkce f předpisem : $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ *pro* $x\neq 0$, $f(0)=\dfrac{1}{2}$.
Ukažte, že funkce f je v bodě $x_0=0$ spojitá .

c) Funkce f je definována : $f(x)=arctg\dfrac{1}{x^2}$, pokud $x\neq 0$ a $f(0)=\dfrac{\pi}{2}$.
Ukažte, že f je spojitá v R a dále zjistěte, pro která $x\in R$ existuje derivace, případně jednostranné derivace $f'_+(x)$ nebo $f'_-(x)$. Tyto derivace spočítejte.

d) Funkce f je definována : $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}$, pokud $x\neq 0$ a $f(0)=0$.
Ukažte, že f je spojitá v R a dále zjistěte, pro která $x\in R$ existuje derivace, případně jednostranné derivace $f'_+(x)$ nebo $f'_-(x)$. Tyto derivace spočítejte.

e) Je dána funkce f předpisem : $f(x)=x^3\cdot\sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *pro* $x\neq 0$, $f(0)=0$.
Ukažte, že funkce f je v bodě $x_0=0$ spojitá. Spočítejte $f'(x)$ pro všechna $x\in R$. Ukažte, že také první derivace funkce f je spojitá v bodě $x_0=0$.

3. Vyšetřování extrémů funkce (globálních i lokálních) , vyšetřování průběhu funkce:

a) průběh funkce ($\exp(x) = e^x$):

$$f(x) := \frac{x}{x^2-1};\ \frac{|x|}{x^2-1};\ \left|\frac{x}{x^2-1}\right|;\ \frac{x^3}{x^2-1};\ \frac{1}{x}+4x^2;\ \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2;$$

$$f(x) := x^2e^{-x};\ xe^{-x^2};\ e^{\frac{1}{x}};\ e^{\frac{1}{x}}-x;\ \exp\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right);\ \frac{e^{-x}}{2-x};\ |x|e^{-|x-1|};$$

$$f(x) := x+\sin x;\quad x-2\,arctg\,x;\quad arctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right);\ arctg\frac{x}{\sqrt{x^2+1}};\ \arcsin\frac{2x}{1+x^2};$$

$$f(x) = x\ln x$$

b) vyšetřete lokální a globální extrémy funkce $f(x) = \exp\left(\sqrt{\left|1-x^2\right|}\right)$.